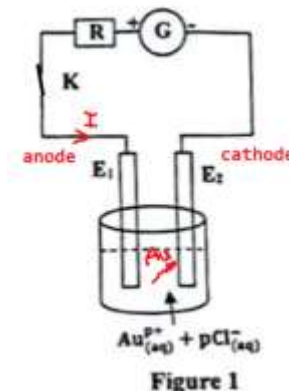


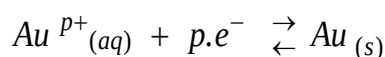
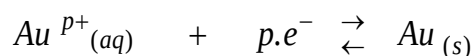
- Chimie -Partie 1 : Electrolyse d'une solution de chlorure d'or1- La proposition juste : C

Lors de l'électrolyse, le courant électrique entre par E_1 ,

et l'or Au se dépose sur E_2 .

2- La réaction au niveau de la cathode :

Au niveau de la cathode, il y aura réduction des ions or selon la demi-équation suivante :

3- La masse de l'or déposé :

$$n_0(Au^{p+}) \quad 0 \quad 0$$

$$n_0(Au^{p+}) - x \quad p.x \quad x$$

$$n_0(Au^{p+}) - x_m \quad p.x_m \quad x_m$$

La quantité d'électricité transportée pendant Δt est : $Q = I \cdot \Delta t$

Mais cette quantité peut s'écrire : $Q = n(e^{-}) \cdot F = p \cdot x \cdot F$

Des deux expressions de Q , on déduit que : $x = \frac{I \cdot \Delta t}{p \cdot F}$

Au cours du temps, l'électrode E_2 augmente de volume. Au bout de la durée Δt ; sa masse a augmentée de :

$$\Delta m = \Delta n(Au) \times M(Au) = (x - 0) \times M(Au)$$

Qui peut s'écrire : $\Delta m = x \cdot M(Au) = \frac{I \cdot \Delta t}{p \cdot F} \cdot M(Au)$ avec $\Delta t = t - 0 = t$

Finalement la masse déposée aura pour expression : $m = \frac{I \cdot M(Au)}{p \cdot F} \cdot t$ (1)

4- * La valeur de p :

D'après la figure 2, la fonction $m = f(t)$ est linéaire dont l'équation représentative est de la

forme : $m = k.t$ (2) où k est le coefficient directeur de la droite.

Des deux relations (1) et (2), on déduit que : $k = \frac{I.M(Au)}{p.F}$

D'où l'expression de p : $p = \frac{I.M(Au)}{k.F}$

A.N : $p = \frac{0,40 \times 197}{\frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{1,5} \times 9,65 \cdot 10^4} \approx 3$

*** Le symbole de l'ion de l'or dans le composé étudié :**

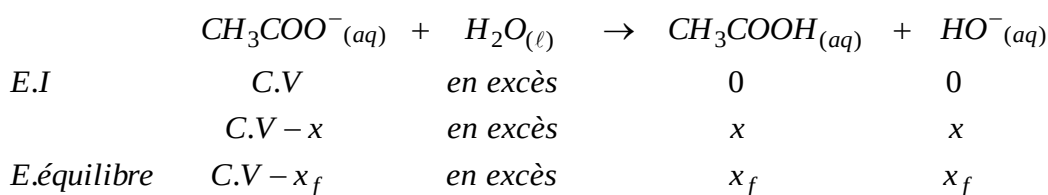
Le symbole de l'ion sera : $Au^{3+}_{(aq)}$

Partie 2 : Etude d'une solution aqueuse d'éthanoate de sodium

1.1 - Le taux d'avancement final de la réaction :

La réaction est limitée, le taux va s'écrire : $\tau = \frac{x_f}{x_m}$

Dressons le tableau d'avancement de cette réaction :



L'ion éthanoate est le réactif limitant : $C.V - x_m = 0 \Rightarrow x_m = C.V$

A l'équilibre, la conductivité de la solution sera :

$$\sigma = \lambda_{Na^+} \cdot [Na^+]_f + \lambda_{CH_3COO^-} \cdot [CH_3COO^-]_f + \lambda_{HO^-} \cdot [HO^-]_f$$

Ou bien : $\sigma = \lambda_{Na^+} \cdot C + \lambda_{CH_3COO^-} \cdot \left(C - \frac{x_f}{V} \right) + \lambda_{HO^-} \cdot \frac{x_f}{V}$

On développe cette expression, on aura : $\sigma = C \cdot (\lambda_{Na^+} + \lambda_{CH_3COO^-}) + (\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}) \cdot \frac{x_f}{V}$

Ou bien : $(\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}) \cdot \frac{x_f}{V} = \sigma - C \cdot (\lambda_{Na^+} + \lambda_{CH_3COO^-})$

On aura l'expression de l'avancement final :
$$x_f = \frac{\sigma - C \cdot (\lambda_{Na^+} + \lambda_{CH_3COO^-})}{\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}} \cdot V$$

Le taux d'avancement final va s'écrire :
$$\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{\frac{\sigma - C \cdot (\lambda_{Na^+} + \lambda_{CH_3COO^-})}{\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}} \cdot V}{C \cdot V}$$

D'où le résultat final :
$$\tau = \frac{\sigma - C \cdot (\lambda_{Na^+} + \lambda_{CH_3COO^-})}{C \cdot (\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-})}$$

$$\tau = \frac{\sigma - 0,1 \cdot 10^3 \times (5 + 4,1) \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^3 \times (19,9 - 4,1) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma - 0,91}{1,58}$$

A.N :
$$\tau = \frac{910,125 \cdot 10^{-3} - 0,91}{1,58} \approx 7,91 \cdot 10^{-5}$$

1.2- Montrons que le pK_A du couple $CH_3COOH_{(aq)} / CH_3COO^-_{(aq)}$ est :
$$pK_A = \log \left(\frac{C \cdot \tau^2}{K_e \cdot (1 - \tau)} \right)$$

On a :
$$K_A = \frac{[CH_3COO^-]_{eq} \times [H_3O^+]_{eq}}{[CH_3COOH]_{eq}} = \frac{[CH_3COO^-]_{eq} \times K_e}{[HO^-]_{eq} \cdot [CH_3COOH]_{eq}}$$

$$\Rightarrow K_A = \frac{\left(C - \frac{x_f}{V} \right) \cdot K_e}{\frac{x_f}{V} \cdot \frac{x_f}{V}} \quad \text{avec } x_f = \tau \cdot x_m = \tau \cdot C \cdot V$$

$$\Rightarrow K_A = \frac{(C - \tau \cdot C) \cdot K_e}{\tau \cdot C \cdot \tau \cdot C}$$

$$\Rightarrow K_A = \frac{(1 - \tau) \cdot K_e}{\tau^2 C}$$

Or on sait que : $pK_A = -\log(K_A)$

Alors :
$$pK_A = -\log \left(\frac{(1 - \tau) \cdot K_e}{\tau^2 C} \right)$$

Ou bien :
$$pK_A = \log \left(\frac{\tau^2 C}{(1 - \tau) \cdot K_e} \right)$$

A.N :
$$pK_A = \log \left(\frac{(7,91 \cdot 10^{-5})^2 \times 0,1}{(1 - 7,91 \cdot 10^{-5}) \times 10^{-14}} \right) \approx 4,8$$

2.1 - Calcul de la concentration molaire C_1 de la solution S_1 :

On applique la définition : $C_1 = \frac{n}{V} \Rightarrow C_1 = \frac{m}{M \cdot V}$

A.N : $C_1 = \frac{328 \cdot 10^{-3}}{82 \times 20 \cdot 10^{-3}} = \underline{0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$

2.2- Le taux d'avancement final τ_1 de la réaction dans S_1 :

Le pK_A du couple étudié ne change pas, alors : $pK_A = \log \left(\frac{\tau_1^2 \cdot C_1}{(1-\tau_1) \cdot K_e} \right)$ avec $1-\tau_1 \approx 1$

$$\Rightarrow pK_A \approx \log \left(\frac{\tau_1^2 \cdot C_1}{K_e} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_1^2 \cdot C_1}{K_e} = 10^{pK_A}$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \sqrt{\frac{10^{pK_A} \cdot K_e}{C_1}}$$

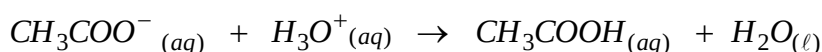
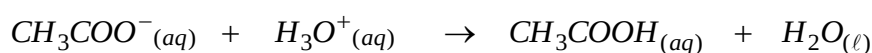
A.N : $\tau_1 = \sqrt{\frac{10^{4,8} \times 10^{-14}}{0,2}} \approx \underline{5,6 \cdot 10^{-5}}$

2.3- Comparaison des taux d'avancement finaux τ et τ_1 :

On remarque bien que : $\tau_1 \approx 5,6 \cdot 10^{-5} < \tau \approx 7,9 \cdot 10^{-5}$ et $C_1 = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} > C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Déduction :

Plus la solution est concentrée, moins la réaction entre l'éthanoate de sodium et l'eau est favorisée. (Si $C \uparrow$ alors $\tau \downarrow$)

3.1- Equation chimique de la réaction :**3.2.1- Vérifions que :** $C_0 = \frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_{BE}}{V_0}$ 

E.I $C_0 \cdot V_0$ $C_A \cdot V_A$ 0 en excès

$C_0 \cdot V_0 - x$ $C_A \cdot V_A - x$ x en excès

E.F $C_0 \cdot V_0 - x_m$ $C_A \cdot V_A - x_m$ x_m en excès

Puisqu'il reste des ions $H_3O^+_{(aq)}$ dans la solution S' , alors les ions éthanoate $CH_3COO^-_{(aq)}$ sont des réactifs limitant, on déduit que : $C_0 \cdot V_0 - x_m = 0 \Rightarrow x_m = C_0 \cdot V_0$

Les ions $H_3O^+_{(aq)}$ qui restent de quantité $C_A \cdot V_A - x_m = C_A \cdot V_A - C_0 \cdot V_0$ sont dosés par les ions $HO^-_{(aq)}$. Et à l'équivalence on peut écrire : $C_A \cdot V_A - C_0 \cdot V_0 = C_B \cdot V_{BE}$

Ou bien : $C_0 \cdot V_0 = C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_{BE}$

Finalement, on a le résultat demandé : $C_0 = \frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_{BE}}{V_0}$

Déduction de la masse m réellement dissoute :

On a la définition de la concentration molaire : $C_0 = \frac{m}{M \cdot V_0}$

Des deux dernières relations, on va écrire : $\frac{m}{M \cdot V_0} = \frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_{BE}}{V_0}$

D'où l'expression de la masse : $m = (C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_{BE}) \cdot M$

A.N : $m = (0,1 \times 30 \cdot 10^{-3} - 0,1 \times 12 \cdot 10^{-3}) \times 82 \approx 0,147 \text{ g} = 147 \text{ mg}$

3.2.2- Comparaison de m et m_0 :

On remarque bien que : $m \approx 147 \text{ mg} < m_0 = 164 \text{ mg}$

Déduction : On conclue que l'éthanoate de sodium dans le sachet n'est pas pur.

La masse des impuretés est environ : $m' \approx 164 - 147 = 17 \text{ mg}$

- Physique -

Ondes mécaniques : L'écoulement silencieux de l'eau dans une conduite cylindrique

1.1- Calcul de la valeur de v_0 :

On applique la formule : $v_0 = \frac{L}{t_1}$

A.N : $v_0 = \frac{1}{676 \cdot 10^{-6}} \approx 1500 \text{ m.s}^{-1}$

1.2- Déduction de la longueur d'onde λ :

On applique la relation : $\lambda = \frac{v_0}{N}$

A.N : $\lambda = \frac{1500}{50.10^3} = 0,03m = 3cm$

2.1- L'expression de τ en fonction de v_e , v_0 et L :

D'après la figure 3, on peut écrire que : $\tau = t_1 - t_2$

Où : * t_1 est la durée mise par l'onde pour aller de E à R, avec la vitesse v_0 dans l'eau au repos :

Alors : $t_1 = \frac{L}{v_0}$

* t_2 est la durée mise par l'onde pour aller de E à R, avec la vitesse v dans l'eau en

mouvement : Alors : $t_2 = \frac{L}{v} = \frac{L}{v_0 + v_e}$, puisque $v = v_0 + v_e$

Des trois relations, on va écrire : $\tau = \frac{L}{v_0} - \frac{L}{v_0 + v_e}$

$$\Rightarrow \tau = L \cdot \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0 + v_e} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L \cdot v_e}{v_0 \cdot (v_0 + v_e)}$$

2.2- Détermination de v_e :

On a la relation précédente : $\tau = \frac{L \cdot v_e}{v_0 \cdot (v_0 + v_e)}$

$$\Rightarrow \tau \cdot v_0 \cdot v_e + \tau \cdot v_0^2 = L \cdot v_e$$

$$\Rightarrow L \cdot v_e - \tau \cdot v_0 \cdot v_e = \tau \cdot v_0^2$$

$$\Rightarrow v_e = \frac{\tau \cdot v_0^2}{L - \tau \cdot v_0}$$

A.N : $v_e = \frac{0,28.10^{-6} \times 1500^2}{1 - 0,28.10^{-6} \times 1500} \approx 0,63m.s^{-1}$

2.3- Déduction du diamètre d de la conduite :

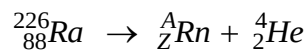
Si la vitesse d'écoulement v_e est une vitesse silencieuse, alors : $v_e = \sqrt{0,02 \cdot d}$

D'où le résultat : $d = \frac{v_e^2}{0,02}$

A.N : $d = \frac{0,63^2}{0,02} \approx \underline{20 \text{ mm}}$

Nucléaire : La désintégration du radium 226

1 - Equation de désintégration du Ra 226 :



Par application des lois de Soddy, on aura :

$$\begin{cases} \text{Conservation du nombre de masse} \\ \text{Conservation de la charge} \end{cases} : \begin{cases} 226 = A + 4 \\ 88 = Z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 226 - 4 = 222 \\ Z = 88 - 2 = 86 \end{cases}$$

2.1 - Calcul de N_0 :

On applique la relation : $N_0 = n_0({}_{88}^{226}\text{Ra}) \cdot N_A \Rightarrow N_0 = \frac{m_0}{M({}_{88}^{226}\text{Ra})} \cdot N_A$

A.N : $N_0 = \frac{1}{226} \times 6,02 \cdot 10^{23} \approx \underline{2,66 \cdot 10^{21}}$ (noyaux à $t=0$)

2.2 - Montrons que :

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

On sait que le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t est donné par la loi de

décroissance radioactive : $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ avec $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

Alors on peut écrire : $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \cdot t}$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{t}{t_{1/2}}} \text{ or } (e)^{n \cdot m} = (e^n)^m$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}} \text{ or } e^{\ln(x)} = x$$

$$\Rightarrow \underline{N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}}$$

2.3 - Energie libérée (en Joule) pendant la durée $\Delta t = t - t_0 = 3 \cdot t_{1/2}$:

Le nombre de noyaux désintégrés pendant cette durée :

$$N_d(3.t_{1/2}) = N_0 - N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3.t_{1/2}}{t_{1/2}}} = N_0 - \frac{N_0}{8} = \frac{7.N_0}{8}$$

L'énergie libérée par la désintégration de ces N_d noyaux est :

$$\begin{aligned} E_{\text{libérée}} &= |\Delta E| \\ &= N_d \cdot \left| m(^{224}_{86}\text{Rn}) + m(\alpha) - m(^{226}_{88}\text{Ra}) \right| \cdot c^2 \\ &= \frac{7.N_0}{8} \cdot \left| m(^{224}_{86}\text{Rn}) + m(\alpha) - m(^{226}_{88}\text{Ra}) \right| \cdot c^2 \\ &= \frac{7 \times 2,66.10^{21}}{8} \times |221,9703 + 4,0015 - 225,9770| \times \underbrace{u \cdot c^2}_{=931,5 \text{ MeV}} \\ &= 1,13.10^{22} \text{ MeV} = 1,8.10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

Electricité :

Partie 1 : Détermination de la capacité d'un condensateur et de l'inductance d'une bobine

1- Détermination de la capacité C_1 :

1.1- Equation différentielle vérifiée par u_{C2} :

- La loi d'additivité des tensions : $u_R + u_{C1} + u_{C2} = E$

- Les relations : $u_R = R.i$, $i = \frac{dq}{dt}$, $u_{C1} = \frac{q}{C_1}$ et $u_{C2} = \frac{q}{C_2}$

$$\Rightarrow u_R = R.i \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C_1 \cdot \frac{du_{C1}}{dt} = C_2 \cdot \frac{du_{C2}}{dt}$$

La première relation deviendra :

$$R.C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{C_2}{C_1} \cdot u_{C2} + u_{C2} = E$$

Elle peut s'écrire : $R.C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{C_2 + C_1}{C_1} \cdot u_{C2} = E$

$$\Rightarrow \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{C_2 + C_1}{R.C_2.C_1} \cdot u_{C2} = \frac{E}{R.C_2}$$

Finalement l'équation différentielle demandée sera :

$$\frac{du_{C2}}{dt} + \frac{1}{R.C_e} \cdot u_{C2} = \frac{E}{R.C_2} \quad \text{avec} \quad C_e = \frac{C_2.C_1}{C_2 + C_1}$$

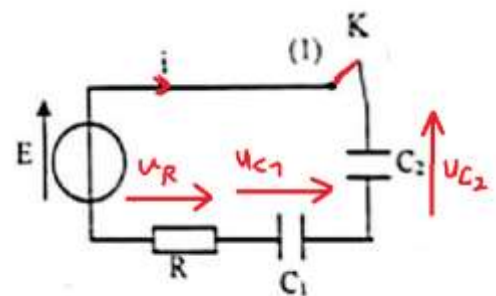


Figure 1

1.2- Les constantes A et τ :

La solution de l'équation précédente est : $u_{C2}(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$

Et sa dérivée sera : $\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{d}{dt} (A(1 - e^{-t/\tau})) = \frac{A}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$

On remplace dans l'équation différentielle : $\frac{A}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{1}{R.C_e} \cdot A(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R.C_2}$

$$\Rightarrow A \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{R.C_e} \right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{A}{R.C_e} - \frac{E}{R.C_2} = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} - \frac{1}{R.C_e} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{A}{R.C_e} - \frac{E}{R.C_2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\tau = R.C_e} \quad \text{et} \quad \underline{A = \frac{E.C_e}{C_2} = E \cdot \frac{C_1}{C_2 + C_1}}$$

1.3- Expression de la tension $u_R(t)$:

La loi d'Ohm aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R.C_2 \cdot \frac{du_{C2}}{dt}$

$$\Rightarrow u_R = R.C_2 \cdot \frac{A}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_R = R.C_2 \cdot \frac{E \cdot \frac{C_1}{C_2 + C_1}}{R.C_e} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_R = C_2 \cdot \frac{E \cdot \frac{C_1}{C_2 + C_1}}{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_2 + C_1}} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_R = C_2 \cdot E \cdot \frac{C_1}{C_2 + C_1} \times \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow \underline{u_R = E \cdot e^{-t/\tau}}$$

1.4- La courbe qui correspond à $\ln(u_R(t))$:

Cherchons l'expression de cette fonction :

$$f(t) = \ln(u_R(t)) = \ln(E \cdot e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow f(t) = \ln E + \ln(e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot t + \ln E$$

C'est une fonction affine, alors sa courbe est une droite qui correspond à la courbe b)

1.5- La valeur de E , de τ et celle de C_1 :

* D'après la courbe b), à l'instant $t = 0$: $f(t=0) = 2,2$

On a aussi : $f(0) = \ln E$

On en déduit que : $\ln E = 2,2 \Rightarrow E = e^{2,2} \approx 9V$

* D'après la courbe a), au régime permanent $t \rightarrow \infty$: $\ln(E - u_{C2}(t \rightarrow \infty)) = 1,1$

On a aussi : $\ln(E - u_{C2}(t \rightarrow \infty)) = \ln(E - A)$

On en déduit que :

$$\ln(E - A) = 1,1$$

$$\Rightarrow E - A = e^{1,1} = 3$$

$$\Rightarrow A = E - 3 = 9 - 3 = 6V$$

On a aussi : $A = E \cdot \frac{C_1}{C_2 + C_1} \Rightarrow C_1 = C_2 \cdot \frac{A}{E - A}$

A.N : $C_1 = 2 \times \frac{6}{9-6} = 4 \mu F$

* On a établi que : $f(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot t + \ln E$

Alors à l'instant $t = \tau$, on peut écrire :

$$f(t = \tau) = -1 + \ln E = -1 + 2,2 = 1,2$$

Par projection (la courbe b), on trouve :

$$\tau = 4ms$$

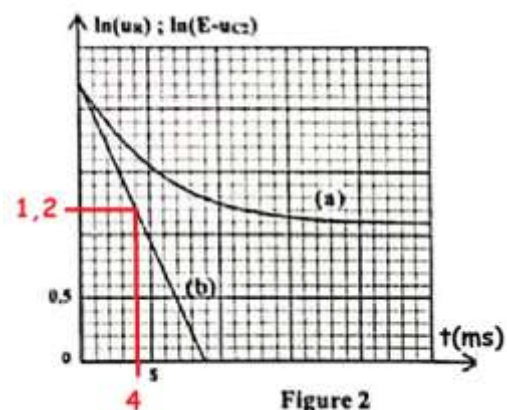


Figure 2

2- Détermination de l'inductance L :**2.1 - Equation différentielle vérifiée par u_L :**

- La loi d'additivité des tensions : $u_L + u_{C2} = 0$ (*)

On dérive deux fois la relation (*) : $\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} = 0$

- On a les relations : $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ et $\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{di}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{u_L}{L}$

On obtiendra : $\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C_2} u_L = 0$

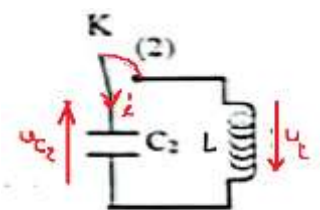


Figure 1

2.2- La valeur de L :

Les oscillations sont périodiques de période : $T_0 = 2 \text{ ms}$

On sait que : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC_2}$

Alors :
$$L = \frac{T_0^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot C_2}$$

A.N :
$$L = \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{4 \times 10 \times 2 \cdot 10^{-6}} \approx 0,05 \text{ H} = 50 \text{ mH}$$

2.3- L'énergie électrique emmagasinée à $t=1,5 \text{ ms}$:

L'énergie emmagasinée dans le condensateur a la forme :

$$E_c(t=1,5 \text{ ms}) = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot (u_{C2}(t))^2$$

A cet instant la tension aux bornes de la bobine est nulle :

$$u_L(t=1,5 \text{ ms}) = 0 \quad (\text{voir la courbe figure 3})$$

On sait aussi que : $u_L + u_{C2} = 0 \Rightarrow u_{C2} = -u_L = 0$

Finalement : $E_c(t=1,5 \text{ ms}) = 0$

Partie 2 : Oscillations forcées dans un circuit RLC série**1- Le circuit est à l'état de résonance électrique :**

D'après les courbes de la figure 5, les tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ sont en phase et par suite la tension $u(t)$ et le l'intensité de courant $i(t)$ sont également en phase, alors ce circuit est en état de résonance.

2- La valeur de C et celle de r :

A la résonance électrique, on a :

* La fréquence du générateur est celle du circuit RLC en série :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{(T_0)^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \quad \text{avec } T_0 = 4 \text{ div} \times 0,5 \text{ ms} / \text{div} = 2 \text{ ms}$$

A.N :
$$C = \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{4 \times 10 \times 0,2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ F} = 0,5 \mu \text{ F}$$

* L'impédance de ce circuit : $Z = R + r$

On a aussi les relations : $U_m = (R + r).I_m$ et $U_{Rm} = R.I_m$

$$\Rightarrow \frac{U_m}{U_{Rm}} = \frac{R+r}{R} \quad \text{avec} \quad \frac{U_m}{U_{Rm}} = \frac{3 \text{div} \times S_v}{2 \text{div} \times S_v} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{R+r}{R} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}R$$

A.N : $r = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \Omega$

Mécanique : Le saut à l'élastique

1* Chute verticale du sportif

1-1 - Equation différentielle vérifiée par la vitesse v de G :

- Système à étudier : {Solide (m)} ;

- Repère d'étude : $R(O ; \vec{k})$

- Bilan des forces :

* Le poids du solide (S) : $\vec{P} = m.g.\vec{k}$

* La force des frottements fluides : $\vec{f} = -\lambda.v^n.\vec{k}$

- On applique la 2^{ème} loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$

- On projette cette relation vectorielle sur l'axe Cz descendant :

$$mg - \lambda.v^n = m.\frac{dv}{dt}$$

Ou bien : $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}.v^n = g \quad (*)$

1-2- La relation $n.\ln(v) = \ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \ln\left(g - \frac{dv}{dt}\right) :$

La relation (*) donnera : $\frac{\lambda}{m}.v^n = g - \frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow v^n = \frac{m}{\lambda} \cdot \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(v^n) = \ln\left[\frac{m}{\lambda} \cdot \left(g - \frac{dv}{dt}\right)\right] \quad \text{et puisque} \quad \ln(x^y) = y.\ln(x) \quad \text{et} \quad \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\Rightarrow \underline{n.\ln(v) = \ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \ln\left(g - \frac{dv}{dt}\right)}$$

1-3-1- La valeur v_ℓ de la vitesse limite :

Au régime permanent : $\frac{dv}{dt}=0$ et $v=v_\ell = \text{Cte}$

D'après la figure 2, si $\frac{dv}{dt}=0$ alors : $v_\ell = 32 \text{ m.s}^{-1}$

1-3-2- La valeur de n est 2 :

On va utiliser deux points de la courbe de la fonction : $\frac{dv}{dt} = f(v)$

Lorsque $v=20 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 6 \text{ m.s}^{-2}$

Lorsque $v=32 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} n \cdot \ln(20) = \ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \ln(g-6) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot \ln(32) = \ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \ln(g) & (2) \end{cases}$$

On fait l'opération (2) - (1) :

$$n \cdot \ln(32) - n \cdot \ln(20) = \ln(g) - \ln(g-6)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(g) - \ln(g-6)}{\ln(32) - \ln(20)}$$

A.N : $n = \frac{\ln(9,8) - \ln(9,8-6)}{\ln(32) - \ln(20)} \approx 2$

1-3-3- La valeur de la constante λ :

La relation (2) peut s'écrire : $\ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) = n \cdot \ln(32) - \ln(g)$

$$\Rightarrow \frac{m}{\lambda} = e^{n \cdot \ln(32) - \ln(g)}$$

$$\Rightarrow \lambda = m \cdot e^{\ln(g) - n \cdot \ln(32)}$$

A.N : $\lambda = 70 \times e^{\ln(9,8) - 2 \times \ln(32)} \approx 0,67 \text{ S.I}$

1-3-4- La valeur de la vitesse v_1 et celle de l'accélération a_3 :

On utilise les deux équations suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{m} \cdot v^2 \Rightarrow a_n = g - \frac{\lambda}{m} \cdot v_n^2 \quad (1) \quad \text{Equation différentielle}$$

Et $v_{n+1} = a_n \cdot \Delta t + v_n$ (2) Equation d'Euler

* La vitesse v_2 :

Equation d'Euler : $v_2 = a_1 \cdot \Delta t + v_1$

A.N : $v_2 = 9,77 \times 0,2 + 1,96 \rightarrow \underline{v_2 = 3,91 \text{ m.s}^{-1}}$

* L'accélération a_3 :

Equation différentielle : $a_3 = g - \frac{\lambda}{m} \cdot v_3^2$ mais $v_3 = a_2 \cdot \Delta t + v_2$ Eq. d'Euler

$$\Rightarrow a_3 = g - \frac{\lambda}{m} \cdot (a_2 \cdot \Delta t + v_2)^2$$

A.N : $a_3 = 9,8 - \frac{0,67}{70} \times (9,67 \times 0,20 + 3,91)^2 \rightarrow \underline{a_3 = 9,47 \text{ m.s}^{-2}}$

2* Etude théorique de la phase de freinage

2-1 - Expression de l'énergie potentielle :

A un instant t , l'énergie potentielle E_p du système est la somme de deux énergies :

- L'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} :

On sait que : $E_{pp} = -mgz' + \text{Cte}$ (L'axe $O'z$ est orienté vers le bas)

Or le plan horizontal est le plan de référence de cette énergie : Quand $z' = \frac{L}{2} \Rightarrow E_{pp} = 0$

On en déduit que la constante Cte est nulle : $\text{Cte} = m \cdot g \cdot \frac{L}{2}$

L'énergie potentielle de pesanteur va s'écrire : $E_{pp} = -m \cdot g \cdot \left(z' - \frac{L}{2} \right)$

- L'énergie potentielle élastique E_{pe} :

On sait que : $E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot \Delta \ell^2 + \text{Cte}$

Or l'état du système à l'équilibre est l'état de référence de cette énergie : Quand $\Delta \ell = 0 \Rightarrow E_{pe} = 0$

On en déduit que la constante Cte est nulle : $\text{Cte} = 0$

L'énergie potentielle élastique va s'écrire : $E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell^2$

D'après la figure 3 (ci-contre) :

On remarque que : $\ell + \frac{L}{2} = \ell_0 + z' \Rightarrow \Delta \ell = \ell - \ell_0 = z' - \frac{L}{2}$

Finalement on aura l'expression : $E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot \left(z' - \frac{L}{2} \right)^2$

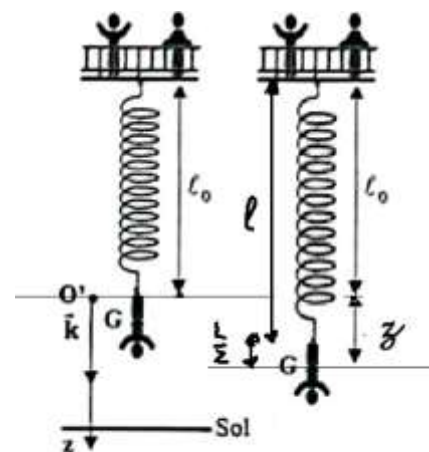


Figure 3

Et l'expression de l'énergie potentielle sera :

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 - m \cdot g \cdot \left(z - \frac{L}{2} \right)$$

2-2-1 - Vérification de la relation : $m \cdot v_0^2 = K \cdot d^2 - 2m \cdot g \cdot d$

*Energie mécanique au passage de G par O' :

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} K \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right)^2 - m \cdot g \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right) \Rightarrow E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

*Energie mécanique quand l'allongement du ressort est maximale :

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + \frac{1}{2} K \cdot \left(z_{\max} - \frac{L}{2} \right)^2 - m \cdot g \cdot \left(z_{\max} - \frac{L}{2} \right) \quad \text{avec} \quad z_{\max} - \frac{L}{2} = \Delta \ell_{\max} = d$$

$$\Rightarrow E_{m1} = \frac{1}{2} K \cdot d^2 - m \cdot g \cdot d$$

*Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{m0} = E_{m1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} K \cdot d^2 - m \cdot g \cdot d$$

$$\Rightarrow \underline{m \cdot v_0^2 = K \cdot d^2 - 2m \cdot g \cdot d}$$

2-2-2- Expression de d : $d = \frac{m \cdot g}{K} + \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{K^2} + \frac{m \cdot v_0^2}{K}}$

On reprend la relation précédente : $m \cdot v_0^2 = K \cdot d^2 - 2m \cdot g \cdot d$

$$\Rightarrow K \cdot d^2 - 2m \cdot g \cdot d - m \cdot v_0^2 = 0 \quad \Delta' = m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K$$

$$\Rightarrow d = \frac{m \cdot g + \sqrt{m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K}}{K}$$

$$\Rightarrow \underline{d = \frac{m \cdot g}{K} + \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{K^2} + \frac{m \cdot v_0^2}{K}}}$$

2-2-3- Le sportif atteint le sol si la raideur de la corde est : $K = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Dans ce cas calculons la longueur ($\ell_0 + \Delta \ell + L$) avec $\Delta \ell = d$, et la comparons avec la hauteur $h = 102 \text{ m}$:

$$d = \frac{70 \times 9,8}{50} + \sqrt{\frac{70^2 \times 9,8^2}{50^2} + \frac{70 \times 20^2}{50}} \approx 41,1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \ell_0 + \Delta\ell + L = 60 + 41,1 + 1,70 = 102,8 \text{ m}$$

On remarque que $(\ell_0 + \Delta\ell + L) = 102,8 \text{ m} > h = 102 \text{ m}$, alors le sportif atteint le sol.

2-2-4- La valeur minimale de la raideur K :

Le sportif atteint à peine le sol, si la condition suivante est réalisée :

$$\ell_0 + d + L < h$$

$$\Rightarrow d < h - \ell_0 - L$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot g + \sqrt{m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K}}{K} < h - \ell_0 - L$$

$$\Rightarrow m \cdot g + \sqrt{m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K} < K \cdot (h - \ell_0 - L)$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K} < K \cdot (h - \ell_0 - L) - m \cdot g$$

$$\Rightarrow m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K < [K \cdot (h - \ell_0 - L) - m \cdot g]^2$$

$$\Rightarrow m^2 \cdot g^2 + m \cdot v_0^2 \cdot K < m^2 \cdot g^2 - 2m \cdot g \cdot K \cdot (h - \ell_0 - L) + [K \cdot (h - \ell_0 - L)]^2$$

$$\Rightarrow m \cdot v_0^2 < -2m \cdot g \cdot (h - \ell_0 - L) + K \cdot (h - \ell_0 - L)^2$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot v_0^2 + 2m \cdot g \cdot (h - \ell_0 - L)}{(h - \ell_0 - L)^2} < K$$

On pose : $K_{\min} = \frac{m \cdot v_0^2 + 2m \cdot g \cdot (h - \ell_0 - L)}{(h - \ell_0 - L)^2}$

Dans ce cas : $K > K_{\min}$

A.N : $K_{\min} = \frac{70 \times 20^2 + 2 \times 70 \times 9,8 \times (102 - 60 - 1,70)}{(102 - 60 - 1,70)^2} \approx 51,3 \text{ N.m}^{-1}$